

2. Prüfung: Numerik

Name:	Alessandro de Finais
Punkte:	13 / 25
Note:	4.8

Hinweise:

- Zeit: 70 Min
- Schreibe die Lösungen aller Aufgaben zusammen mit dem vollständigen Lösungsweg auf ein separates Blatt. Lösungen ohne Lösungsweg geben keine Punkte.

Aufgabe 1

Berechne das Taylorpolynom 4. Grades der Funktion

X (a) $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x = 0$. (2P)

↳ (b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ an der Stelle $x = 0$. (2P)

(c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ an der Stelle $x = 1$. (2P)

Aufgabe 2

Löse folgende Differentialgleichungen durch überlegen. Kein Lösungsweg erforderlich.

X (a) $y'(x) = 3y(x)$ und $y(0) = 0$ (1P)

(b) $y'(x) = 3 \cdot (y(x) - 2)$ und $y(0) = 2$ (2P)

Hinweis: Verwende bei (b) die Teilaufgabe (a)

Aufgabe 3

Schreibe ein Programm, welches **einen** Schritt des Bisektionsverfahrens ausführt. Als Eingabe bekommt das Programm das Anfangsintervall $[a, b]$ und die Funktion f . Als Ausgabe gibt das Programm ein neues Intervall $[c, d]$ heraus, in welchem sich die Nullstelle befindet.

(4P)

```
function intervall = bisektion(f,a,b)
% Die Funktion f hat im Intervall [a,b] eine Nullstelle

c=a;
d=b;

% Neue obere und untere Intervallgrenze berechnen
...

%Output
intervall = [c,d];

end
```

Hinweis: Falls Klammern oder andere Zeichen falsch gesetzt werden gibt es keinen Abzug, das Vorgehen und die "Befehlsart" müssen jedoch stimmen.

Aufgabe 4

- (a) Erkläre (mit Hilfe einer Skizze), warum das Bisektionsverfahren bei nicht stetigen Funktionen oftmals nicht erfolgreich ist. (2P)

- (b) Schreibe ein Programm, welches die Summe der ersten n ungeraden Zahlen berechnet. Das heisst für $n = 3$: $1 + 3 + 5 = 9$ (3P)

```
function summe = ungerade(n)
% Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen wird berechnet

summe = 0;

...

end
```

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Weiter wissen wir, dass sich der x -Wert 1.5 nicht weit von der Nullstelle dieser Funktion befindet. Nähere die Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens an. (Mache höchstens vier Iterationsschritte - berechne also höchstens vier neue x -Werte. Solltest du vorher auf einen Fixpunkt treffen, kannst du vorher abbrechen.) (4P)

Aufgabe 6

Ein weiteres Verfahren zur Nullstellenberechnung ist das Sekantenverfahren:

% Nullstellen bestimmen mit dem Sekantenverfahren

```
function nullstelle = sekanten(f,x0,x1,n)
```

```
% Nullstelle
```

```
x(0)=x0;
```

```
x(1)=x1;
```

```
for i= 2:n
```

```
    x(i) = x(i-1) - (x(i-1)-x(i-2))/(f(x(i-1))-f(x(i-2))) * f(x(i-1)) f(x(i-1))
```

```
end
```

```
nullstelle = x(n);
```

```
end
```

```
end
```

(a) Was gibt die Funktion heraus, wenn du $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ und $n = 3$ wählst? (3P)

(b) Wie gross ist der Fehler? (1P)

Aufgabe 7

Beim Euler-Cauchy-Verfahren erhalten wir statt der genauen Funktion $y(x)$, eine Funktion, die aus einem Streckenzug aus Stücken von linearen Funktionen besteht. (3P)

(a) Zeichne einen beliebigen Graphen (nicht linear) irgendeiner Funktion y in ein Koordinatensystem. (3P)

(b) Zeichne zu diesem Graphen einen möglichen Streckenzug, wie er als Lösung des Euler-Cauchy-Verfahrens entstehen könnten, in das gleiche Koordinatensystem. (Begründe, warum du den Streckenzug in einer bestimmten Art und Weise gezeichnet hast.)

Numerik Test

$$a) p_4(x) = \frac{\cos(0)}{1} - \frac{\sin(0)}{1}x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\sin(0)}{6}x^3 + \frac{\cos(0)}{24}x^4$$

$$= 1 - 0x - \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$p_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$b) f'(x) = \frac{0-1}{x^2-2x+7}$$

$$f''(x) = \frac{0 - (-2x+2)}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x + 7} = \frac{2x-2}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 7}$$

$$f'''(x) \neq \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = -(x-7)^{-2} \cdot 1$$

$$f''(x) = 2(x-7)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(x-7)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 24(x-7)^{-5}$$

$$p_4(x) = -7 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 = -7 - x - x^2 - x^3 - x^4$$

c) seht nicht, würde 0 im Nenner verursachen

5. a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 8$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 7$ ✓

$x_1 = 1,5 - \frac{1,5^3 - 6 \cdot 1,5^2 + 7 \cdot 1,5 - 8}{3 \cdot 1,5^2 - 12 \cdot 1,5 + 7} = 1,66$ ✓

$x_2 = 1,66 - \frac{f(1,66)}{f'(1,66)} = 1,77$ ✓

$x_3 = 1,77 - \frac{f(1,77)}{f'(1,77)} = 1,857$ ✓

$x_4 = 1,857 - \frac{f(1,857)}{f'(1,857)} = 1,907$ ✓

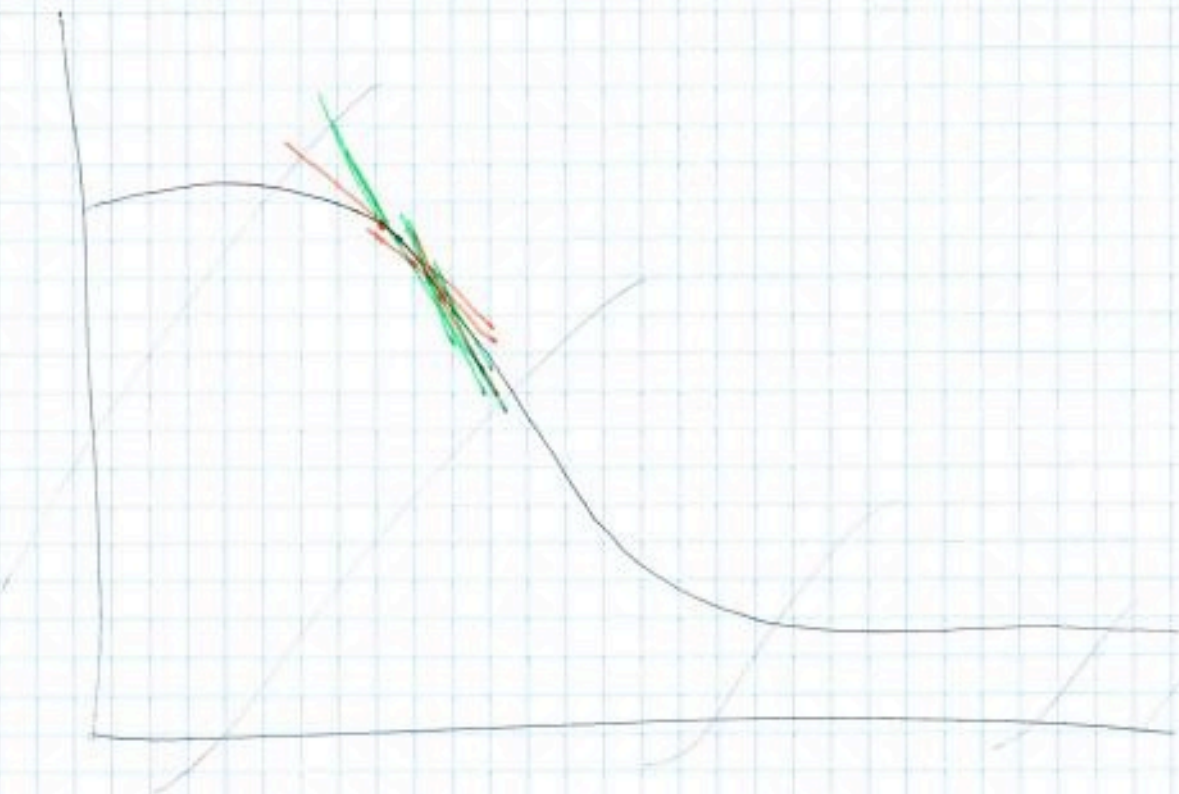
6. a) $x(2) = 3 - \frac{(3 - 0) \cdot 7}{7 - 3} = 4$ ✓

$x(3) = 4 - \frac{(4 - 3)}{(4 - 7)} \cdot 4 = 2,66 = x(n)$

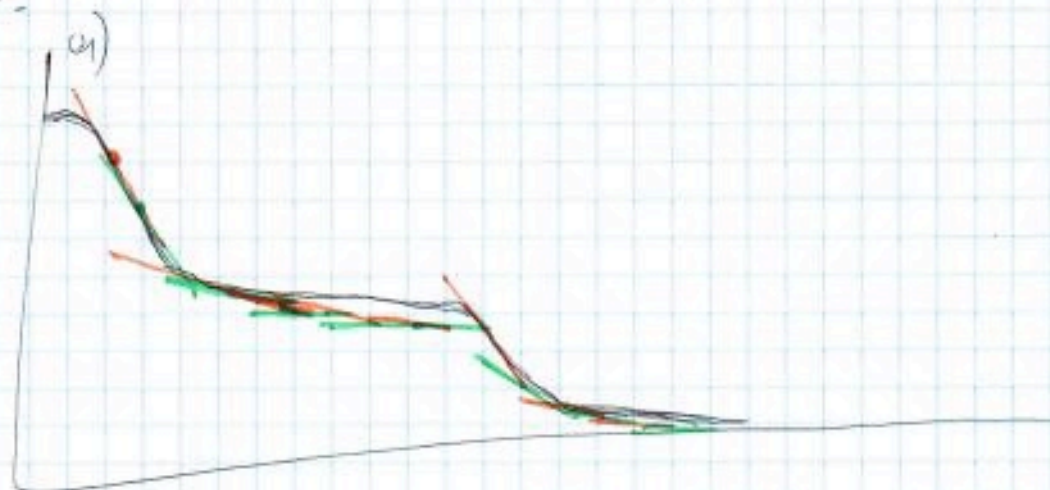
b) $C = x^2 - 7x + 4$

$C = (x - 3,5)^2 - 12,25$ $x = 2$ Fehler: $0,66 = 2,66 - 2$ ✓

7.



7.



b) b)

abwechselungsweise

Der Streckenzug nähert die Form der Funktion an, muss aber nicht immer darauf liegen, da nur die Tangente ausschlaggebend ist und der Abstand von einem Häufchen sehr vergrößert.

